q-Schur algebra の tilting module(トーリック多様体の幾何と凸多面体)

橋本, 光靖

数理解析研究所講究録
934 巻 1996 年 190-211

q-Schur algebra の tilting module

名古屋大学医療技術短期大学部　橋本 光靖 (Mitsuyasu Hashimoto)

1 序

本稿の主目的は (量子) 一般線形群の表現と, quasi-hereditary algebra としての (q-)Schur algebra について survey することです。8 節の 1 部を除き, 比較的古い結果の紹介で, その多くは 80 年代から 90 年代初頭にかけて発表されているものです。

一般の split した簡約群の表現も (S. Donkin による) Schur algebra の表現とある意味で同じなので, その形で述べました。Schur algebra を仲立ちとする形で多元環の表現の概念であった tilting module が簡約群にも定義されることを中心に述べます。結果として S. Donkin の仕事を中心に述べることになりました。既に素晴らしい本や解説記事が出ている部分も多く, 同じ内容を浅学の身でいまさら解説するのは苦しい限りですが, 代数群と多元環の間にある Schur algebra についてより多くの方に知って頂ければ幸いです。本稿での話題である (q-)Schur algebra を解説した本としては [17] があり, 本稿の内容のかなりの部分を含んでいる上に多くの情報を含んでいます。

本稿の内容を勉強するに当たり, 林孝宏, 星野光男, 松尾厚, 山形邦夫, 若松隆義, C. M. Ringel の各先生に貴重な情報を教えて頂きました。ここにお礼を申し上げます。また, この講演を実現させて下さった日比孝之先生に感謝致します。

2 記号と準備

以下の話しは一般の可換環上でも可能な部分が多いが, 簡単のためにすべて固定された体 k 上で行なう。テンサー積の記号 $\otimes$ は k 上のテンサー積 $\otimes_k$ を表す。

加群が単純又は既約であるとは, 部分加群が 2 個であることで同じ意味だが, 「単純加群」, 「既約表現」のように使い分ける。群 Γ に対しては $k\Gamma$ は Γ の k 上の群環を表す。G が代数群 (代数半群) といったら, G が k 上の affine algebraic k-group (k-monoid) であることを意味し, $k[G]$ でその座標環を表す。A が k-algebra として可換で k 上有限生成な Hopf algebra (bialgebra) で, $G = \operatorname{Spec} A$ だといっても同じことである。G-module といったら, rational G-module を意味する。これは right A-comodule と同義で, 以下, G-modules 全体が G-homomorphisms (つまり A-comodule maps) でなす圏を $G\operatorname{Mod}$ 又は $\operatorname{Mod} A$ で表す。

一般に k-coalgebra A に対して, $\operatorname{Mod} A$ は right A-comodules の全体を表す。$\operatorname{Mod} A$ は abelian で enough injectives であり, $\operatorname{Mod} A$ の injective object であることと, A の直和の

直和因子であることとは同値である。

B と C が k-coalgebras で, $\varphi : B \to C$ は coalgebra map とする。$\mathrm{Mod}\,B$ は right B-comodules の圏として, $\mathrm{Mod}\,C$ も同様とする。$M \in \mathrm{Mod}\,B$ に対して,

$$M \xrightarrow{\omega} M \otimes B \xrightarrow{1 \otimes \varphi} M \otimes C$$

を構造射として, $M \in \mathrm{Mod}\,C$ である。ここに ω は M の B-comodule としての元々の構造射である。これによって関手 $\mathrm{res}^B_C : \mathrm{Mod}\,B \to \mathrm{Mod}\,C$ が定まる。

left C-comodule L と right C-comodule N に対して,

$$0 \to N \boxtimes_C L \to N \otimes L \xrightarrow{\rho_{N,L}} N \otimes C \otimes L$$

によって, N と L の *cotensor product* $N \boxtimes_C L$ を定義する (実際, この定義は module のテンサー積の定義の双対になっている)。ここに, $\rho_{N,L} = \omega_N \otimes 1_L - 1_N \otimes \omega_L$ である。$\mathrm{ind}^B_C(N) := N \boxtimes_C B$ とおくと, 容易に分かるように ind^B_C は $\mathrm{Mod}\,C$ から $\mathrm{Mod}\,B$ への左完全関手を定める。

$\psi : H \to G$ が代数半群の準同型の時, 座標環の間の bialgebra map $k[G] \to k[H]$ が定まる。$\mathrm{res}^{k[G]}_{k[H]}$, $\mathrm{ind}^{k[G]}_{k[H]}$ をそれぞれ res^G_H, ind^G_H で表して, restriction functor, induction functor と呼ぶが, induction はテンサー積を用いて定義される (有限群の表現や, Lie 環の展開環などの context でいうところの) induction とは同じものではない。テンサー積の induction は右完全で, restriction の left adjoint (Frobenius の相互律) で射影的対象を保つが, 我々の induction は左完全で, restriction の right adjoint で入射的対象を保つ (一般には右完全ではない)。

さて, B が C の subcoalgebra の場合を考えると, $N \in \mathrm{Mod}\,C$ に対して, $\mathrm{ind}^B_C(N) = N \boxtimes_C B \subset N \boxtimes_C C \cong N$ なる単射によって, $\mathrm{ind}^B_C(N)$ は N の subspace

$$\{n \in N \mid \omega_N(n) \in N \otimes B (\subset N \otimes C)\}$$

と同一視される。

注意 2.1 従って特に $B \subset C$ の時, 随伴の counit $(\mathrm{ind}^B_C \circ \mathrm{res}^B_C)(M) \to M$ は同型である。これにより

$$\mathrm{Hom}_B(M, M') \cong \mathrm{Hom}_B((\mathrm{ind}^B_C \circ \mathrm{res}^B_C)(M), M') \cong \mathrm{Hom}_C(\mathrm{res}^B_C(M), \mathrm{res}^B_C(M'))$$

である。従って, $\mathrm{Mod}\,B$ は C-comodule で$\omega_N(N) \subset N \otimes B$ となるもの全体からなる $\mathrm{Mod}\,C$ の充満部分圏とみなされる。

G が代数群で, H が G の k-subgroup の時, higher induction $R^i\mathrm{ind}^G_H$ (ind^G_H の right derived functor) は次のように記述される。簡単のために N を有限次元の H-module とする。$N \times G$ には $(n, g) \cdot h := (h^{-1}n, gh)$ により H が作用し, quotient $E(N) := (N \times G)/H$ は G/H 上の vector bundle である。対応する locally free sheaf を $\mathcal{E}(N)$ で表す時,

$$R^i\mathrm{ind}^G_H(N) \cong H^i(G/H, \mathcal{E}(N)) \qquad (2.2)$$

なる N について functorial な同型が存在する。

詳しくは, [14] の Part I を御覧下さい。

k 代数 A の加群には, A-準同型は A の反対側から作用するものとする。従って, 左 (右) A 加群の準同型 $\alpha : M_1 \to M_2$ と $\beta : M_2 \to M_3$ に対して, その合成は $\alpha\beta$ ($\beta\alpha$) と表される。左又は右 A 加群 M に対して, M の socle (top), つまり M の最大な semisimple submodule (quotient) を $\operatorname{soc} M$ ($\operatorname{top} M$) で表す。M の radical ($M \to \operatorname{top} M$ の kernel) は $\operatorname{rad} M$ で表す。この記号は, coalgebra の comodules にも同様の意味で用いる。

さて, S を有限次元 k 代数とし, $e \neq 0$ を S の巾等元とする。良く知られているように, S-module M に対して $\operatorname{Hom}_S(Se, M) \cong eM$ である。これは eSe-modules の同型である。関手 $\operatorname{Hom}_S(Se, ?) : S\operatorname{Mod} \to eSe\operatorname{Mod}$ を f で表す。この関手について, 次のようなことがいえる。

(2.3) $S = Se \oplus S(1-e)$ なので, Se は射影的で f は完全。

(2.4) $g : eSe\operatorname{Mod} \to S\operatorname{Mod}$ を $g(N) = Se \otimes_{eSe} N$ で定めると, $f \circ g$ は恒等関手に自然同値 ($e(Se \otimes_{eSe} N) \cong N$)。$f$ は g の右随伴関手である。従って特に, $N, N' \in eSe\operatorname{Mod}$ について,

$$\operatorname{Hom}_S(g(N), g(N')) \cong \operatorname{Hom}_{eSe}(N, (f \circ g)(N')) \cong \operatorname{Hom}_{eSe}(N, N')$$

である。

(2.5) M が単純左 S-module とする。この時 $f(M) = 0$ 又は $f(M)$ は単純 eSe-module である。N が単純 eSe-module の時, $\operatorname{top} g(N)$ は単純で, $f(\operatorname{top} g(N)) \cong N$ である。このことから, 単純 eSe-module と, 単純 S-module で f で消えないものとは $1:1$ に対応している。[10, 6.2] を参照。

(2.6) N が直既約な有限生成 eSe-module の時, $\operatorname{End}_S(g(N)) \cong \operatorname{End}_{eSe}(N)$ は local だから, $g(N)$ も直既約。$N \not\cong N'$ なら $g(N) \not\cong g(N')$ なので, eSe が有限表現型 (有限生成直既約加群の同型類が有限集合) ならば S もそうである。

P を順序集合とする。$I \subset P$ が P の *poset ideal* であるとは, $P \ni p \leq q \in I$ の時, $p \in I$ が成立することをいう。P が有限の時,

$$\operatorname{rank} P := \sup\{\#C \mid C \subset P,\ C \text{ は全順序集合}\} - 1$$

とおく。また, $p \in P$ に対して,

$$(-\infty, p] := \{q \in P \mid q \leq p\}, \qquad [p, \infty) := \{q \in P \mid q \geq p\}$$

とおく。$\operatorname{rank}(-\infty, p]$, $\operatorname{rank}[p, \infty)$ をそれぞれ $\operatorname{ht} p$, $\operatorname{coht} p$ で表す。

3 一般線形群の Schur algebra

以下, $n \geq 1$ とし, $V = k^n$ とする。$r \geq 1$ に対して, $V^{\otimes r} = V \otimes \cdots \otimes V$ は右 $k\mathfrak{S}_r$-module である。ここに, $\mathfrak{S}_r$ は r 次の対称群で, その作用は

$$(v_1 \otimes v_2 \cdots \otimes v_r)\sigma = v_{\sigma 1} \otimes v_{\sigma 2} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma r}$$

$(v_1, v_2, \ldots, v_r \in V,\ \sigma \in \mathfrak{S}_r)$ で与えられる。

定義 3.1 k-代数 $\mathrm{End}_{k\mathfrak{S}_r} V^{\otimes r}$ を $S(n,r)$ 又は $S(V,r)$ で表して, $V = k^n$ の r 次の *Schur algebra* と呼ぶ。

Schur algebra の歴史は古く, [10] によると 1901 年の I. Schur の dissertation に登場しているそうである。

定義 3.2 $\mathrm{End}(V)$-module を $\mathrm{GL}(V)$ の多項式表現と呼ぶ。ここに, $\mathrm{End}(V)$ はかけ算による代数半群と見ている。

$k[\mathrm{End}(V)] \subset k[\mathrm{GL}(V)]$ 故, 注意 2.1 により, $\mathrm{End}(V)$-module は $\mathrm{GL}(V)$-module の中のあるクラスと思え, 上の定義の言葉使いが妥当であることが分かる。「多項式表現」という言葉は, W が 有限次元 $\mathrm{GL}(V)$-module の時, 代数群の準同型 $\rho_W : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(W)$ が得られるが, $A \in \mathrm{GL}(V)$ を行列と見た時, やはり行列と見た $\rho_W(A)$ の各成分が A の成分の多項式で書けることと, W が多項式表現であることとが同値であることから来ている。

さて, $E = \mathrm{End}(V)$ とおくと, $k[\mathrm{End}(V)] = SE^* = \bigoplus_{r \geq 0} S_r E^*$ と同一視される。ここに S は symmetric algebra, S_r は rth symmetric power である。各 $S_r E^*$ は SE^* の subcoalgebra であり, このことから, $\mathrm{GL}(V)$ の多項式表現 (つまり right SE^*-comodule) W は, $W = \bigoplus_r W_r$, W_r は $S_r E^*$-comodule と分解することが分かる。実際 $W_r = \mathrm{ind}_{SE^*}^{S_r E^*}(W)$ とおけば良い。W_r を W の degree r component と呼ぶ。上の (W について functorial な) 直和分解により, W を調べることは各 W_r, つまり $S_r E^*$-comodule を調べることに帰着する。

$C_r = S_r E^*$ は k 上有限次元なので, $\mathrm{Mod}\, C_r$ は C_r の dual algebra C_r^* 上の left modules のなす圏 $C_r^*\,\mathrm{Mod}$ と同値である [24, Chapter II]。実は, C_r^* は Schur algebra $S(V,r)$ と同型であり, 有限次元 k-代数 $S(V,r)$ の表現をすべての r について調べることが, $\mathrm{GL}(V)$ の多項式表現を調べることと同じなのである。

Schur algebra に関する面白い性質をいくつか挙げよう。詳しいことは [10] を御覧下さい。

(3.3) $N \geq n$ の時, $S(N,r)$ の巾等元 e (具体的な形は省略) があって, $S(n,r) \cong eS(N,r)e$ である。さらに $n \geq r$ ならば, 関手 $\mathrm{Hom}_{S(N,r)}(S(N,r)e, ?) : S(N,r)\,\mathrm{Mod} \to S(n,r)\,\mathrm{Mod}$ は同値である。

(3.4) k が標数 0 又は k が標数 p で $p > r$ ならば, $S(n,r)$ は半単純である。これは Maschke の定理から $k\mathfrak{S}_r$ が半単純になるので明白である。

(3.5) $n \geq r$ ならば, $\mathrm{End}_{S(n,r)} V^{\otimes r} \cong k\mathfrak{S}_r$ である。

(3.6) $n \geq r$ とすると $V^{\otimes r}$ は $S = S(n,r)$ のある巾等元 e を用いて Se と表せる。よって, $k\mathfrak{S}_r \cong \mathrm{End}_S(Se) \cong eSe$ である。

(3.6) により, 前節で述べた一般論が使える。Higman の定理 [21, p.194] によると, k が標数 $p > 0$ の時, 有限群 Γ に対して, 群環 $k\Gamma$ が有限表現型であることと, Γ の p-Sylow 部分群が巡回群であることは同値である。これを対称群 $\mathfrak{S}_r$ に適用すると, $r \geq 2p$ の時, $k\mathfrak{S}_r$ は有限表現型ではない。したがって $n \geq r \geq 2p$ なら $S(n,r)$ も有限表現型ではない。一方, $n < 2p$ の時には $S(n,r)$ が有限表現型になることは (容易とはいえないが) 直接示すことができる。従って, $n \geq r$ の時, $S(n,r)$ が有限表現型であることと, $r < 2p$ は同値である。

また, $S(n,r)$ の既約表現は以下にも述べるように, degree r で長さ高々 n の partition で parameterize されている。ここに patition とは非負整数の弱い意味での減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ で $i \gg 0$ の時に$\lambda_i = 0$ であるものを意味し, $\min\{i \mid \lambda_i = 0\} - 1$ をその長さ, $\sum_i \lambda_i$ をその degree という。λ が長さ高々 n の時, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ のように (それ以降は 0 が続くから) 有限列で書くこともある。$n \geq r$ ならば, degree r の partition は長さ高々 n である。従って, $k\mathfrak{S}_r$ の既約表現は degree r の partition の中のある部分集合で parameterize されるわけだが, それは, k が標数 $p > 0$ の時, partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ (Young 図と見た時, λ_i は i 行目の箱の個数) で $i = 1, 2, \ldots, r$ に対して $\lambda_i - \lambda_{i+1} < p$ ($\lambda_{r+1} = 0$) となるものの全体になっている [10, p.94]。

Schur algebra は一般線形群の多項式表現と対称群の表現の橋渡しをする存在といえるだろう。

4　簡約群の Schur algebra

80 年代に S. Donkin が k-split した簡約群及びその parabolic subgroup 上で Schur algebra の理論を展開した。

以下, G は k-split した簡約群とする。G が簡約群であるとは, $\bar{k}$ を k の代数閉包とする時, $\bar{G} = \bar{k} \otimes_k G$ は non-trivial な $\bar{k}$ 上の連結被約代数群で, その根基 (最大連結正規可解部分群) がトーラス ($\mathbb{G}_m := \mathrm{GL}(1, \bar{k})$ の有限直積) であることをいう。半単純群, トーラス, 一般線形群, それらの直積などがその例である。簡約群 G が k-split しているとは, その極大トーラス (トーラスであるような部分群で包含関係で極大なもの) T で, k 上定義されたものが存在することをいう。ここでは簡単のために parabolic subgroup については触れずに, G そのものの Schur algebra に限定して話しを進める (本質的には同じである)。T を含むような k 上定義された Borel 部分群 (極大な連結可解部分群) が存在するので, その一つを B として固定する。

本稿で唯一の具体例である $G = \mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(n,k)$ の場合には, T は正則な対角行列の全体, B は正則な下半三角行列の全体をとって考える。

G の表現に関する事実を列挙しよう。

(4.1) T の表現は 1 次元表現の直和である。1 次元表現は, $T \cong \mathbb{G}_m^d = \mathrm{GL}(1,k)^d$ の時,

$$X(T) := \mathrm{Hom}_{\text{代数群}}(T, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}^d$$

で parameterize される。$X(T)$ は (表現のテンサー積を加法として) additive group と見なされ, 上の同型は加法群の同型である。$X(T)$ の元を weight と呼ぶ。$\lambda \in X(T)$ に対応する 1 次元表現を k_λ で表す。$G = \mathrm{GL}(n,k)$ の時, T の 1 次元表現は,

$$\begin{bmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n \end{bmatrix} \mapsto t_1^{\lambda_1} t_2^{\lambda_2} \cdots t_n^{\lambda_n}$$

$(\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n)$ の形であり, 自然に $X(T) \cong \mathbb{Z}^n$ である。

(4.2) B の root subgroup で生成される部分群を U とおくと, $B \cong T \ltimes U$ と表される ($U(\bar{k})$ は $B(\bar{k})$ の巾単元全体である。$G = \mathrm{GL}(n,k)$ の場合では, U は下半三角行列で, 対角成分が 1 であるようなものの全体である)。$\lambda \in X(T)$ に対して, k_λ に T の作用はそのままで, U を trivial に作用させることにより, k_λ は B-module になる。B の既約表現の全体は, $\{k_\lambda \mid \lambda \in X(T)\}$ である。

(4.3) G/B は k 上射影的である。よって 2 節で見たように, M が有限次元の B-module なら, $R^i\mathrm{ind}_B^G(M)$ も有限次元であり, $i > \dim G/B$ の時 $R^i\mathrm{ind}_B^G(M) = 0$ である (この消滅は M が無限次元でも正しい)。

(4.4) B を negative Borel にすると, positive root, dominant weight が決まる。G の positive root の全体を Σ^+ で, dominant weight の全体を X^+ で表す。Σ^+ も X^+ も $X(T)$ の部分集合である。$G = \mathrm{GL}(n,k)$ の場合では, $X(T) \cong \mathbb{Z}^n$ なる同一視のもとで, $\varepsilon_i = (0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (i 番目のみが 1) とおく時,

$$\Sigma^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

であり,

$$X^+ = \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n\}$$

となっている。

(4.5) $\mathrm{ind}_B^G(k_\lambda) \neq 0 \iff \lambda \in X^+$

G の Weyl 群 $N(T)/T$ を W で表す ($N(T)$ は T の normalizer)。W は有限群で自然に T に作用し, 従って $X(T)$ にも作用している。$G = \mathrm{GL}(n,k)$ の時, $W = \mathfrak{S}_n$ であって, W の $X(T) = \mathbb{Z}^n$ への作用は, 成分の置換である。

定義 4.6 $\lambda \in X^+$ に対して, $\mathrm{ind}_B^G(k_\lambda)$ を $\nabla(\lambda) = \nabla_G(\lambda)$ で表し, λ に対応した *induced module* と呼ぶ。G の Weyl 群の最長元を w_0 で表す時, $R^{\dim G/B}\mathrm{ind}_B^G(w_0\lambda) \cong \nabla(-w_0\lambda)^*$ を $\Delta(\lambda) = \Delta_G(\lambda)$ で表し, λ に対応した *Weyl module* と呼ぶ。ここに $(\ )^*$ は双対表現を表す。

$G = \mathrm{GL}(n,k)$ の場合, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ に対して, $w_0\lambda = (\lambda_n, \ldots, \lambda_2, \lambda_1)$ である。
簡約群 G の表現の中で, induced moules と Weyl modules は重要な役割を果たす。

(4.7) **(Kempf's vanishing)** $\lambda \in X^+$ ならば, $i > 0$ について $R^i\mathrm{ind}_B^G(k_\lambda) = 0$ である。

(4.8) $\lambda \in X^+$ に対して, $\mathrm{soc}(\nabla(\lambda)) \cong \mathrm{top}(\Delta(\lambda))$ であって, これらは単純である。この表現を $L(\lambda)$ で表す。$\{L(\lambda) \,|\, \lambda \in X^+\}$ が単純 G-modules の全体。さらに, $\lambda, \mu \in X^+$ で $L(\mu)$ が $\mathrm{rad}\,\Delta(\lambda)$ 又は $\nabla(\lambda)/\mathrm{soc}\,L(\lambda)$ の composition factor ならば, $\mu < \lambda$ が成立する。

(4.9) **(Cline-Parshall-Scott-van der Kallen)** $\lambda, \mu \in X^+$ について,

$$\mathrm{Ext}^i_G(\Delta(\lambda), \nabla(\mu)) \cong \begin{cases} k & (i = 0,\ \lambda = \mu) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(4.10) $\dim_k \Delta(\lambda) = \dim_k \nabla(\lambda)$ は 'Weyl's character formula' [14, p.250] で求まる。

(4.11) k が標数 0 ならば, $\lambda \in X^+$ に対して, $\Delta(\lambda) \cong L(\lambda) \cong \nabla(\lambda)$ であって, 任意の G-module は $L(\lambda)$ の直和である。

以上については, [14] を御覧下さい。

定義 4.12 $\lambda, \mu \in X$ について, $\lambda - \mu \in \mathbb{N}\Sigma^+$ の時, $\lambda \geq \mu$ と表す。ここに, $\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$ である。

X は順序 $\leq$ によって順序集合である。

定義 4.13 X^+ の部分集合 π が saturated であるとは, π が X^+ の poset ideal であることを意味する (2節を参照)。

X^+ の有限部分集合 K に対して, K を含む saturated な X^+ の有限部分集合が存在する。

定義 4.14 $\pi \subset X^+$ とする。$M \in G\,\mathrm{Mod}$ が π に属するとは, M の subquotient で simple なものは $L(\lambda)$ $(\lambda \in \pi)$ に同型となることをいう。

以下では π は X^+ の saturated subset とする。
$M \in G\,\mathrm{Mod}$ に対して, M の G-submodule で π に属するもののうち, 最大のものがある。これを $O_\pi(M)$ で表す。$O_\pi(k[G])$ は $k[G]$ の subcoalgebra である。これを $A(\pi)$ で表すことにする。実は, $O_\pi(M) = \mathrm{res}^{A(\pi)}_{k[G]}\,\mathrm{ind}^{A(\pi)}_{k[G]}(M)$ であり, $O_\pi(M)$ は $(\mathrm{ind}^{A(\pi)}_{k[G]}(M)$ と同一視して) $A(\pi)$-comodule である。

(4.15) π が有限集合ならば, $\dim_k A(\pi) < \infty$ である。

定義 4.16 (4.15) の状況で, $A(\pi)^*$ を G の π に関する *Schur algebra* と呼び, $S(G, \pi)$ 又は $S(\pi)$ で表す。

次の定理は Schur algebra $S(\pi)$ と G との関係をよく表している。

定理 4.17 (Donkin [7], Cline-Parshall-Scott [3]) M, N が π に属する G-module の時, 任意の $i \geq 0$ に対して,

$$\mathrm{Ext}^i_{S(\pi)}(M,N) \cong \mathrm{Ext}^i_G(M,N)$$

である。

上の (4.17) によって, π に属する G-module を調べることは $A(\pi)$-comodule を調べることであり, π が有限集合の時は, (4.15) によって, $A(\pi)$-comodule を調べることは, dual algebra $S(\pi) = A(\pi)^*$ 上の module を調べることに他ならない。有限次元 G-module はある有限な π に属しているので, ある意味で簡約群 G の表現は有限次元代数 Schur algebra の表現として眺め直すことができるわけである。

例 4.18 $G = \mathrm{GL}(n,k)$ とする。$\pi = \mathbb{N}^n \cap X^+$ の時, π は長さが高々 n の partition の全体である。M が π に属することと, M が $\mathrm{GL}(n,k)$ の多項式表現であることは同値である。また, $\lambda = (r,0,0,\ldots,0) \in \mathbb{Z}^n = X(T)$ で, $\pi = (-\infty, \lambda] = \{\mu \in X^+ \mid \mu \leq \lambda\}$ とおくと, π は degree r で長さが n 以下の partition の全体である。この時, $S(G,\pi) \cong S(n,r)$ である。

上のように, Donkin の導入した Schur algebra は, 古典的な Schur algebra の一般化になっているのである。

5 Schur algebra と Quasi-hereditary algebra

前節で紹介した Donkin の Schur algebra とほぼ同時に, 独立に Cline-Parshall-Scott は, Schur algebra $S(G,\pi)$ と森田同値な有限次元代数を定義し, quasi-hereditary algebra の概念に到達した。Quasi-hereditary algebra の定義は Scott [23] の中ではじめて与えられ, その後 Dlab, Ringel, Soergel らによって一般論の整備がなされた。

以下, 簡単のため A は k 上の有限次元代数とする。$A\,\mathrm{mod}$ によって, k 上有限次元な left A-modules 全体のなす category を表す。

単純 A 加群の同型類は有限である。その代表系が有限順序集合 π によって, $\{L(\lambda) \mid \lambda \in \pi\}$ と添字づけられているとする。各 $\lambda \in \pi$ に対して, 単純加群 $L(\lambda)$ の projective cover を $P(\lambda)$ で, injective hull を $Q(\lambda)$ でそれぞれ表す。つまり, $P(\lambda)$ ($Q(\lambda)$) は top (socle) が $L(\lambda)$ であるような射影 (入射) 加群として特徴づけられる加群である。

定義 5.1

$$\nabla(\lambda) = \nabla_A(\lambda) = \bigcap_{\mu \not\leq \lambda} \bigcap_{\phi \in \mathrm{Hom}_A(Q(\lambda),Q(\mu))} \mathrm{Ker}\,\phi \ (\subset Q(\lambda))$$

とおいて, $\nabla(\lambda)$ を λ に対応した induced module と呼ぶ。また

$$\Delta(\lambda) = \Delta_A(\lambda) = P(\lambda) / \left(\sum_{\mu \not\leq \lambda} \sum_{\phi \in \mathrm{Hom}_A(P(\mu),P(\lambda))} \mathrm{Im}\,\phi \right)$$

とおいて, $\Delta(\lambda)$ を λ に対応した Weyl module (又は Verma module) と呼ぶ。

Weyl module $\Delta(\lambda)$ の特徴づけを掲げよう。$M \in A\,\mathrm{mod}$ で $\lambda \in \pi$ の時, $[M : L(\lambda)]$ で $L(\lambda)$ が M の組成列に現れる回数を表す。

補題 5.2 $M \in A\,\mathrm{mod}$ と $\lambda \in \pi$ に対して, 次は同値。

1. $M \cong \Delta(\lambda)$

2. $\mathrm{top}\, M \cong L(\lambda)$ で, $\mu \not\leq \lambda$ ならば $[M : L(\mu)] = 0$ である。さらに, $\mathrm{top}\, N \cong L(\lambda)$ で $\mu \not\leq \lambda$ ならば $[N : L(\mu)] = 0$ を満たす $N \in A\,\mathrm{mod}$ は M の準同型像である。

3. $\mathrm{top}\, M \cong \Delta(\lambda)$ で, $\mu \not\leq \lambda$ ならば $[M : L(\mu)] = 0$ である。さらに, $\mu \leq \lambda$ ならば $\mathrm{Ext}^1_A(M, L(\mu)) = 0$ である。

A の opposite algebra を A° で表そう。Duality functor $D := \mathrm{Hom}_k(?, k)$ は $A\,\mathrm{mod}$ から $A^\circ\,\mathrm{mod}$ への反変同値である (D が D の quasi-inverse)。$\{D(L(\lambda)) \mid \lambda \in \pi\}$ が A° の単純加群の全体であるから, A° の単純加群も π で添字づけられている。$D(P_A(\lambda))$, $D(Q_A(\lambda))$ がそれぞれ, $D(L(\lambda))$ の injective hull, projective cover であることに注意すると, $\Delta_{A^\circ}(\lambda) \cong D(\nabla_A(\lambda))$, $\nabla_{A^\circ}(\lambda) \cong D(\Delta_A(\lambda))$ が分かる。この意味で, Weyl module と induced module は双対概念である。これにより, 例えば補題 5.2 は induced module の特徴づけに読み換えることができる。

前節の状況で, $\lambda \in X^+$ に対して, $\lambda \in \pi \subset X^+$ となる任意の有限な saturated subset π に対して, (4.8) によって$\Delta_G(\lambda)$, $\nabla_G(\lambda)$ は π に属している。実は

補題 5.3 $\Delta_G(\lambda) \cong \Delta_{S(G,\pi)}(\lambda)$, $\nabla_G(\lambda) \cong \nabla_{S(G,\pi)}(\lambda)$ が成立する (ここに $S(G, \pi)$ の単純加群は自然に順序集合 π で parameterize されているから, 右辺はその順序に関するものである)。

証明 $A = S(G, \pi)$ とおく。補題の第一の同型を示すには, 補題 5.2 の **3** の条件を確かめれば良い。Ext に関する条件以外は, (4.8) から従う。一方, $\mu \leq \lambda$ とする時, 完全列

$$0 \to L(\mu) \to \nabla_G(\mu) \to \nabla_G(\mu)/L(\mu) \to 0$$

から, 完全列

$$\mathrm{Hom}_G(\Delta_G(\lambda), \nabla_G(\mu)/L(\mu)) \to \mathrm{Ext}^1_G(\Delta_G(\lambda), L(\mu)) \to \mathrm{Ext}^1_G(\Delta_G(\lambda), \nabla_G(\mu))$$

が得られるが, (4.8) によって $\mathrm{Hom}_G(\Delta_G(\lambda), \nabla_G(\mu)/L(\mu)) = 0$ であり, また (4.9) によって $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta_G(\lambda), \nabla_G(\mu)) = 0$ であるから, $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta_G(\lambda), L(\mu)) = 0$ が言え, $\mathrm{Ext}^1_A(\Delta_G(\lambda), L(\mu)) = 0$ もいえる (定理 4.17 を使うまでもない)。

双対的に, $\nabla(\lambda)$ が一致することも示される。 □

今見たように, 有限次元代数の context での $\Delta_A(\lambda)$, $\nabla_A(\lambda)$ は本来の意味での Weyl module, induced module の abstraction なのである。但し, 今のところ, A や π にとりわけ何の条件も課していないので, これで, $\Delta(\lambda)$, $\nabla(\lambda)$ に本来の Weyl module, induced module の持つ性質を期待するのは虫が良過ぎる。その「良い性質」を抽象化したのが quasi-hereditary の概念というわけである。Quasi-hereditary の定義に移ろう。

定義 5.4 $M \in A\,\mathrm{mod}$ が Schurian であるとは, $\mathrm{End}_A M$ が斜体であることをいう。

有名な Schur の補題は, 単純 A 加群は Schurian であることを主張している。

補題 5.5 $\lambda \in \pi$ に対して, 次は同値。

1 $\Delta(\lambda)$ は Schurian

2 $[\Delta(\lambda) : L(\lambda)] = 1$

3 $M \in A\,\mathrm{mod}$, $\mathrm{top}\, M \cong \mathrm{soc}\, M \cong L(\lambda)$ で, $\mu \not\leq \lambda$ ならば $[M : L(\mu)] = 0$ が成立しているならば, $M \cong L(\lambda)$ である。

2* $[\nabla(\lambda) : L(\lambda)] = 1$

3* $\nabla(\lambda)$ は Schurian

補題 5.6 補題 5.5 の条件がすべての $\lambda \in \pi$ で成立する時, 次は同値である。

1 任意の $\lambda, \mu \in \pi$ と $M \in A\,\mathrm{mod}$ に対して, λ と μ が比較不能, $\mathrm{top}\, M \cong L(\lambda)$, $\mathrm{soc}\, M \cong L(\mu)$ だとすると, ある $\nu \in \pi$ が存在して $\nu > \lambda, \mu$, $[M : L(\nu)] \neq 0$ である。

2 任意の $\lambda, \mu \in \pi$ と $M \in A\,\mathrm{mod}$ に対して, λ と μ が比較不能, $\mathrm{top}\, M \cong L(\lambda)$, $\mathrm{soc}\, M \cong L(\mu)$ だとすると, ある $\nu \in \pi$ が存在して $\nu > \lambda$ 又は $\nu > \mu$ で, $[M : L(\nu)] \neq 0$ である。

3 $\lambda, \mu \in \pi$, $\mathrm{Ext}^1_A(\Delta(\lambda), L(\mu)) \neq 0$ ならば $\mu > \lambda$ である。

4 $\lambda, \mu \in \pi$ に対して, $\mathrm{Ext}^1_A(\Delta(\lambda), \nabla(\mu)) = 0$ が成立する。

3* $\lambda, \mu \in \pi$, $\mathrm{Ext}^1_A(L(\mu), \nabla(\lambda)) \neq 0$ ならば $\mu > \lambda$ である。

A 加群の集合 $\mathcal{X}$ と $M \in A\,\mathrm{mod}$ に対して, M が $\mathcal{X}$-filtration を持つとは, M の filtration

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_r = 0$$

が存在して, 各 $i = 1, \ldots, r$ に対してある $X_i \in \mathcal{X}$ が存在して $M_{i-1}/M_i \cong X_i$ となることをいう。$\mathcal{X}$-filtration を持つ A-modules の全体を $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ で表す。

また, $\Delta := \{\Delta_A(\lambda) \mid \lambda \in \pi\}$, $\nabla := \{\nabla_A(\lambda) \mid \lambda \in \pi\}$ とおく。$M \in A\,\mathrm{mod}$ が $\mathcal{F}(\Delta)$ ($\mathcal{F}(\nabla)$) に属する時 Δ-good (∇-good) であるという。

定理 5.7 補題 5.5 の条件がすべての $\lambda \in \pi$ について成立し, 補題 5.6 の同値な条件が成立する時, 次は同値である。

1 Left A-module A は Δ-good である。

2 $\mathcal{F}(\Delta) = \{X \in A\,\mathrm{mod} \mid \mathrm{Ext}^1_A(X, \nabla)\}$

3 $\mathcal{F}(\Delta) = \{X \in A\,\mathrm{mod} \mid \mathrm{Ext}_A^i(X, \nabla)\ (\forall i > 0)\}$

4 $\mathrm{Ext}_A^2(\Delta, \nabla) = 0$

3* $\mathcal{F}(\nabla) = \{Y \in A\,\mathrm{mod} \mid \mathrm{Ext}_A^i(\Delta, Y)\ (\forall i > 0)\}$

2* $\mathcal{F}(\nabla) = \{Y \in A\,\mathrm{mod} \mid \mathrm{Ext}_A^1(\Delta, Y)\}$

1* Left A-module $D(A_A) = \mathrm{Hom}_k(A_A, k)$ は Δ-good である。

定義 5.8 定理 5.7 の仮定がみたされ, さらに定理 5.7 の同値な条件もみたされる時, (A, π) は *quasi-hereditary* であるという。単に A が quasi-hereditary ということもある。

命題 5.9 前節の状況で, 有限な X^+ の saturated subset π に対して, Schur algebra $(S(\pi), \pi)$ は quasi-hereditary である。

証明 $\lambda \in \pi$ の時, $\mathrm{top}(\Delta(\lambda)) = L(\lambda)$ で (4.8) により $\mathrm{Hom}_A(\Delta(\lambda), \mathrm{rad}\,\Delta(\lambda)) = 0$ であるから, $0 \neq \varphi \in \mathrm{End}_A(\Delta(\lambda))$ に対して, 合成

$$\Delta(\lambda) \xrightarrow{\varphi} \Delta(\lambda) \to \mathrm{top}\,\Delta(\lambda) = L(\lambda)$$

も 0 ではない (さもないと $\mathrm{Im}\varphi \subset \mathrm{rad}\,\Delta(\lambda)$ となる) から全射である。よって $\Delta(\lambda) = \mathrm{Im}\varphi + \mathrm{rad}\,\Delta(\lambda)$ となって φ は全射であり, $\varphi^{-1} \in \mathrm{End}_A(\Delta(\lambda))$ となって $\mathrm{End}_A(\Delta(\lambda))$ は斜体。補題 5.6 の条件 **4** と定理 5.7 の条件 **4** は (4.9) 及び定理 4.17から従う。 □

定理 5.7 から分かるように, quasi-hereditary algebra A の Δ-good modules の全体 $\mathcal{F}(\Delta)$ は (短完全列による) 拡大と直和因子で閉じている。また $A \in \mathcal{F}(\Delta)$ だから, 有限生成射影加群は Δ-good である。**2** ⇒**3** から, $\mathcal{F}(\Delta)$ は全射の kernel についても閉じている。

A が hereditary (つまり $\mathrm{gl.dim}\,A \leq 1$) とし, π を A の単純加群の同型類とする。$L, L' \in \pi$ に対して, L の projective cover から L' の projective cover へ non-zero map (単射になる) がある時に $L' \leq L$ と定義すれば, 順序になり, この順序に関して$\Delta(L) \cong L$ であり, 補題 5.6 の条件 **3** も容易に確かめられる。定理 5.7 の 条件 **4** は明らかであり, (A, π) は quasi-hereditary である。今の順序と逆の順序を π に入れると, すべての $\Delta(\lambda)$ が projective になり, やはり quasi-hereditary になる。もう少し一般に, 大域次元が 2 以下の k 上有限次元代数は (適当な π の順序がとれて) quasi-hereditary になる [5]。

Quasi-hereditary algebra の著しい性質を挙げよう。

$M \in A\,\mathrm{mod}$ に対して, $\mathrm{Supp}\,M := \{\lambda \in \pi \mid [M : L(\lambda)] \neq 0\}$ とおく。

命題 5.10 (A, π) は quasi-hereditary とする時, 次が成立する。

1 $M \in A\,\mathrm{mod}$ の時, $r := \mathrm{rank}(\mathrm{Supp}\,M)$ とおくと, $(\mathrm{rad}\,A)^{2^{r+1}-1}M = 0$ である。

2 $\lambda \in \pi$ の時, $\mathrm{proj.}\ \dim_A \Delta(\lambda) \leq \mathrm{coht}\,\lambda$ である。

3 $\lambda \in \pi$ の時, $\mathrm{proj.}\ \dim_A L(\lambda) \leq \mathrm{rank}\,\pi + \mathrm{ht}\,\lambda$ である。

4 $\mathrm{gl.}\ \dim(A) \leq 2\,\mathrm{rank}\,\pi$ である。

Quasi-hereditary algebra に関する詳しいことは [4] 及びその reference を御覧下さい。

6 Tilting module

K. Akin と D. A. Buchsbaum は論文 [1] の中で, 一般線形群の Schur algebra $S(n,r)$ の大域次元が有限であることを示すとともに, 次の事実を示している。

定理 6.1 $n \geq r$ の時, degree r の partitions λ, μ と $i \geq 0$ に対して, 同型

$$\mathrm{Ext}^i_{S(n,r)}(\nabla(\tilde{\lambda}), \nabla(\tilde{\mu})) \cong \mathrm{Ext}^i_{S(n,r)}(\Delta(\lambda), \Delta(\mu))$$

が存在する。ここに, partition $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ に対して, その転置 $\tilde{\gamma} := (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \ldots)$ は $\tilde{\gamma}_i := \#\{j \in \mathbb{Z} \,|\, 1 \leq j,\ \lambda_j \geq i\}$ で与えられる partition である。

この定理は S. Donkin によって一般の簡約群の Schur algebra について広く成り立っているある事実の特別の場合であることが明らかにされた。Tilting module がこれを説明づけるのに重要な役割を演じている。

$M \in A\,\mathrm{mod}$ に対して, M の有限直和の直和因子と同型な A 加群の全体を $\mathrm{add}(M)$ で表す。宮下先生による一般化された tilting module の定義を述べる。

定義 6.2 ([19]) $T \in A\,\mathrm{mod}$ が A の tilting module であるとは, 次の 3 条件が成立することをいう。

P proj. $\dim_A T < \infty$

G 完全列

(6.3) $$0 \to A \to T_0 \to T_1 \to \cdots \to T_r \to 0$$

で各 T_i が $\mathrm{add}(T)$ に属するものがある。

E $\mathrm{Ext}^i_A(T,T) = 0$ $(i > 0)$

また, T が cotilting module であるとは, $DT = \mathrm{Hom}_k(T,k)$ が A° の tilting module であることをいう。

Tilting module について次が成立する。以下, T は A 上の tilting module とする。

(6.4) $\mathrm{End}_A(T) = B$ とおくと, T は A-B 両側加群である。T は右 B-module として tilting module であり, $\mathrm{End}_B(T) \cong A$ である。その意味で B と A の立場は対称的である。この状況を $(A, {}_AT_B, B)$ が tilting triple であると言うことにしよう。

(6.5) 任意の非負整数 e に対して, $\mathrm{KE}_e(T)$ を $i \neq e$ ならば $\mathrm{Ext}^i_A(T,M) = 0$ となる $M \in A\,\mathrm{mod}$ の全体からなる $A\,\mathrm{mod}$ の full-subcategory, $\mathrm{KT}_e(T)$ を $i \neq e$ ならば $\mathrm{Tor}^B_i(T,N) = 0$ となる $N \in B\,\mathrm{mod}$ の全体からなる $B\,\mathrm{mod}$ の full-subcategory とする時, $\mathrm{KE}_e(T)$ と $\mathrm{KT}_e(T)$ は圏同値で, $\mathrm{Ext}^e_A(T,?) : \mathrm{KE}_e(T) \to \mathrm{KT}_e(T)$ と $\mathrm{Tor}^B_e(T,?) : \mathrm{KT}_e(T) \to \mathrm{KE}_e(T)$ が互いに quasi-inverse である。

(6.6) $G(A)$, $G(B)$ でそれぞれ Amod, Bmod の Grothendieck 群を表すことにする。この時

$$\mathrm{Ext}: G(A) \to G(B),\ [X] \mapsto \sum_{i \geq 0} (-1)^i [\mathrm{Ext}_A^i(T, X)]$$

と

$$\mathrm{Tor}: G(B) \to G(A),\ [Y] \mapsto \sum_{i \geq 0} (-1)^i [\mathrm{Tor}_i^B(T, Y)]$$

は互いに逆写像である。

(6.7) T の互いに非同型な直既約な直和因子の個数と, A の単純加群の個数と, B の単純加群の個数はいずれも等しい。

(6.8) $\mathrm{gl.\,dim}\, A < \infty \iff \mathrm{gl.\,dim}\, B < \infty$ である。

詳しくは [19] を御覧下さい。

T が A の tilting module の時, $F := \mathrm{Hom}_A(T, ?)$ とおくと, $F : \mathrm{KE}_0(T) \to \mathrm{KT}_0(T)$ は同値で, F によって $\mathrm{add}(T)$ と $\mathrm{add}(B)$ (Bmod の projectives) が対応するのは明白である。さらに T が cotilting A-module でもある時, (B, DT, A) が tilting triple であるから, DT は B の left tilting cotilting module である。

$$F(DA) = \mathrm{Hom}_A(T, DA_A) \cong \mathrm{Hom}_A(A_A, DT) \cong DT$$

により, $\mathrm{add}(DA)$ (Amod の injectives) が F によって $\mathrm{add}(DT)$ に対応していることに注意する。

さて, (A, π) が quasi-hereditary algebra で T が A の tilting module であっても, $B = \mathrm{End}_A(T)$ が quasi-hereditary にはならない例が存在する ([4] 参照)。その 例では $\mathrm{gl.\,dim}\, B = 4$ である。しかし, 次の事実が Ringel によって示された。

定理 6.9 ([22]) (A, π) は quasi-hereditary algebra とする。この時,

1 A の tilting cotilting module は存在する。

2 T が A の tilting cotilting module であることと, $\mathrm{add}(T) = \mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\nabla)$ であることは同値である。

3 以下, T は A の tilting cotilting module であるとする。$\lambda \in \pi$ の時, T の直既約な直和因子 $T(\lambda)$ で, $\max(\mathrm{Supp}(T(\lambda))) = \lambda$ であるようなものが, 同型を除いて一意的に存在する。$T(\lambda)$ は (A, π) と λ のみで定まる。

4 $M \in A\mathrm{mod}$ に対して, 次は同値である。

1. $M \in \mathcal{F}(\nabla)$
2. $i \geq 1$ に対して $\mathrm{Ext}_A^i(T, M) = 0$

5 以下, $B := \mathrm{End}_A(T)$, $F := \mathrm{Hom}_A(T, ?) : A\,\mathrm{mod} \to B\,\mathrm{mod}$ とする。$\lambda \in \pi$ に対して, $L_B(\lambda) := \mathrm{top}\,F(\nabla_A(\lambda))$ は単純 B 加群であり, $\{L_B(\lambda) \mid \lambda \in \pi\}$ が単純 B 加群の同型類の代表系である。

6 π の双対 (集合としては π で順序は逆にしたもの) を π^* で表すと, (B, π^*) は quasi-hereditary であって, $\lambda \in \pi = \pi^*$ に対して,

$$F(\nabla_A(\lambda)) \cong \Delta_B(\lambda),\ F(T_A(\lambda)) \cong P_B(\lambda),\ F(Q_A(\lambda)) \cong T_B(\lambda)$$

が成立する。

上記の (B, π^*) を (A, π) の共役と呼ぶことにしよう。B は A のみで森田同値を除いて一意的に決まる。上の定理の **4** と (6.5) の $e = 0$ の場合から直ちに次が得られる。

系 6.10 定理の記号の下で, $F = \mathrm{Hom}_A(T, ?)$ は $\mathcal{F}(\nabla_A)$ から $\mathcal{F}(\Delta_B)$ への同値を与える。Quasi-inverse は $G = T \otimes_B ?$ である。

次も tilting module の一般論からの帰結である。

系 6.11 上の記号の下で, $M, N \in \mathcal{F}(\nabla_A)$ ならば, すべての $i \geq 0$ に対して, $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) \cong \mathrm{Ext}^i_B(FM, FN)$ である。

さて, G が k-split した簡約群で $\lambda \in X^+$ の時, 直既約な有限次元 G-module で, Δ-good かつ ∇-good で support の最大元が λ であるようなものが同型を除いて一意的に存在する。実際, $\lambda \in \pi$ となる任意の有限な X^+ の saturated subset π をとって, quasi-hereditary algebra $S(G, \pi)$ の $T(\lambda)$ がそれを与える (π にはよらない)。よってこの表現を $T_G(\lambda)$ 又は単に $T(\lambda)$ で表し, S. Donkin [8] に従い, *G の highest weight λ の (partial) tilting module* と呼ぶことにする。

ここで, induced modules のテンサー積に関する結果を掲げる。

定理 6.12 G が k-split した簡約群とする時, 次が成立する。

1 $\lambda, \mu \in X^+$ の時, $\nabla(\lambda) \otimes \nabla(\mu) \in \mathcal{F}(\nabla_G)$

2 $\lambda \in X^+$ で G' が G の Levi-subgroup の時, $\mathrm{res}^G_{G'}(\nabla_G(\lambda)) \in \mathcal{F}(\nabla_{G'})$ である。

ここでは, Levi-subgroup の定義はしないが, 自然な部分群 $\mathrm{GL}(m) \times \mathrm{GL}(n) \subset \mathrm{GL}(m+n)$ はその例である。この定理は S. Donkin によって k が標数 2 でないか又は, G が E_7 又は E_8 型の component を持たない時に示され [6], O. Mathieu [18] によって完全に示された。

上記定理の **1** により, ∇-good な G-module はテンサー積で閉じている。また,

$$\Delta(\lambda) \otimes \Delta(\mu) = \nabla(-w_0\lambda)^* \otimes \nabla(-w_0\mu)^* \cong (\nabla(-w_0\lambda) \otimes \nabla(-w_0\mu))^*$$

により, Δ-good な G-modules もまたテンサー積で閉じている。したがって, $T(\lambda) \otimes T(\mu)$ は, G の partial tilting modules の直和である。

7 q-Schur algebra

この節では橋本-林 [11] 及び林氏 [13] の流儀で量子一般線形群と q-Schur algebra について述べる。[13] では multi-parameter の量子古典群の座標環を構成している。

以下, $q \in k^\times$ を固定して考える。$n \geq 1$, V を k-basis $e_1, \ldots, e_n$ を持つ k 上の n 次元ベクトル空間とする。

定義 7.1 $\beta \in \mathrm{End}_k(V \otimes V)$ を $1 \leq i, j \leq n$ に対して

$$\beta(e_i \otimes e_j) = \begin{cases} qe_j \otimes e_i & (i < j) \\ e_i \otimes e_i & (i = j) \\ (1-q^2)e_i \otimes e_j + qe_j \otimes e_i & (i > j) \end{cases}$$

と定めることにより定義する。

β は $A_{n-1}^{(1)}$ 型の神保の Yang-Baxter operator (例えば [15]) である。

一般にベクトル空間 W と $\varphi \in \mathrm{End}_k(W \otimes W)$ と $1 \leq i < r$ に対して, $\varphi_i \in \mathrm{End}_k(W^{\otimes r})$ を $\varphi_i = \mathrm{id}_{W^{\otimes(i-1)}} \otimes \varphi \otimes \mathrm{id}_{W^{\otimes(r-i-1)}}$ で定義する。Yang-Baxter operator β について, 次が成立する。

(7.2) **(Yang-Baxter equation)** $\beta_1\beta_2\beta_1 = \beta_2\beta_1\beta_2$ が $\mathrm{End}_k(V \otimes V \otimes V)$ で成立する。

(7.3) **(Iwahori's relation)** $(1-\beta)(1+q^{-2}\beta) = 0$ が $\mathrm{End}_k(V^{\otimes 2})$ で成立する。特に, $q^{-2}\beta + 1 - q^{-2}$ は β の逆元である。

V の基底 $e_1, \ldots, e_n$ を止めているので, $E = \mathrm{End}_k(V)$ は行列環と自然に同一視されている。E^* の標準的な基底元 x_{ij} を $e_i^* \otimes e_j$ ($e_1^*, \ldots, e_n^*$ は $e_1, \ldots, e_n$ の双対基底) に写す同型 $E^* \to V^* \otimes V$ は基底 $e_1, \ldots, e_n$ のとり方によらず, $V^* \otimes V$ は E^* と同一視される。

また, E^* は coproduct, counit がそれぞれ

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_k x_{ik} \otimes x_{kj}, \quad \varepsilon(x_{ij}) = \delta_{ij} \text{ (Kronecker's delta)}$$

で与えられる k-coalgebra である。E^* の coalgebra structure は自然にテンソル代数 TE^* の bialgebra structure に拡張される。

$\beta_{E^*} \in \mathrm{End}_k(E^* \otimes E^*)$ を合成

$$E^* \otimes E^* \cong V^* \otimes V \otimes V^* \otimes V \xrightarrow{1\otimes\tau\otimes 1} V^* \otimes V^* \otimes V \otimes V \xrightarrow{(\beta^*)^{-1}\otimes\beta} V^* \otimes V^* \otimes V \otimes V$$
$$\xrightarrow{1\otimes\tau\otimes 1} V^* \otimes V \otimes V^* \otimes V \cong E^* \otimes E^*$$

によって定める。ここに τ は自然なテンソルの順序の入れ換えである。この時, 次が成立する。

(7.4) Yang-Baxter equation $(\beta_{E^*})_1(\beta_{E^*})_2(\beta_{E^*})_1 = (\beta_{E^*})_2(\beta_{E^*})_1(\beta_{E^*})_2$ がみたされる。

(7.5) $\beta_{E^*}: E^* \otimes E^* \to E^* \otimes E^*$ は coalgebra map である。

(7.6) 両側イデアル $(\mathrm{Im}(\mathrm{id}_{E^*\otimes E^*} - \beta_{E^*}))$ は TE^* の biideal である。

Quotient bialgebra $TE^*/(\mathrm{Im}(\mathrm{id}_{E^*\otimes E^*} - \beta_{E^*}))$ を $k[\mathrm{Mat}_q(n)]$ で表す。$q=1$ の時, β 及び β_{E^*} はテンサーの順序を入れ換える写像であり, したがって $k[\mathrm{Mat}_q(n)]$ は $S(E^*) \cong k[E] = k[\mathrm{Mat}(n)]$ である。$\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して, $l(\sigma)$ で σ の長さを表す。

$$\det{}_q = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-q)^{l(\sigma)} x_{1\,\sigma 1} \cdots x_{n\,\sigma n}$$

とおく。$\det_q \in k[\mathrm{Mat}_q(n)]$ は *quantum determinant* と呼ばれる。$\det_q$ は $k[\mathrm{Mat}_q(n)]$ の中心に属する group-like element なので, 局所化 $k[\mathrm{GL}_q(n)] = k[\mathrm{Mat}_q(n)][\det_q^{-1}]$ は自然に bialgebra になるが, さらに antipode も持ち, Hopf algebra となる。$q=1$ の時, $\det_q$ は行列 (x_{ij}) の行列式であり, $k[\mathrm{GL}_q(n)]$ は $k[\mathrm{GL}(n)]$ になっている。

さて, その構成法から, $q=1$ の時と同様, $k[\mathrm{Mat}_q(n)] = SE^* = \bigoplus_{r\ge 0} S_r E^*$ は graded であり, 各 $r \ge 0$ について, $S_r E^*$ は SE^* の有限次元 subcoalgebra である。

定義 7.7 $S_r E^*$ の dual algebra $(S_r E^*)^*$ を $S_q(n,r)$ で表し, *q-Schur algebra* と呼ぶ。

また, $q=1$ の時に, $S(n,r) = \mathrm{End}_{k\mathfrak{S}_r} V^{\otimes r}$ と定義されたように, この流儀での定義も可能である。

定義 7.8 k 上の岩堀 *Hecke* 環 $\mathcal{H}_q(r)$ を生成元 $b_1, \ldots, b_{r-1}$ と基本関係式

$$\begin{array}{ll} b_i b_j = b_j b_i & (|i-j| \ge 2) \\ b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} & (1 \le i \le r-2) \\ (1-b_i)(1+q^{-2} b_i) = 0 & (1 \le i \le r-1) \end{array}$$

を持つ k 代数として定義する。

$\mathcal{H}_q(r)$ が $r!$ 次元であり, $q=1$ の時に $k\mathfrak{S}_r$ と同型であることは見やすい。また, $b_i \mapsto \beta_i$ により, $\mathcal{H}_q(r)$ が $V^{\otimes r}$ に右から作用する ($\mathcal{H}_q(r) \cong (\mathcal{H}_q(r))^\circ$ は関係式から明白なので, 左右の別は大きな問題ではないが) ことが関係式 (7.2) 及び (7.3) から分かる。一方, V は left E-module なので, right E^*-comodule であり, $V^{\otimes r}$ は $S_r E^*$-comodule したがって $S_q(n,r)$-module になる。

補題 7.9 $V^{\otimes r}$ は $S_q(n,r)$ 加群として忠実で, $S_q(n,r)$ は $\mathrm{End}_k V^{\otimes r}$ の部分代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{H}_q(r)} V^{\otimes r}$ と同一視される。さらに $n \ge r$ ならば, $V^{\otimes r}$ は $\mathcal{H}_q(r)$ 加群としても忠実であり, $\mathcal{H}_q(r) = \mathrm{End}_{S_q(n,r)} V^{\otimes r}$ である。

量子一般線形群 $\mathrm{GL}_q(n)$ の多項式表現とは, 定義により right $k[\mathrm{Mat}_q(n)]$-comodule のことである。さて, $\{x_{ij} \,|\, i \ne j\}$, $\{x_{ij} \,|\, i < j\}$ で張られる E^* の subspace はそれぞれ E^* の coideal なので, $k[\mathrm{GL}_q(n)]$ の両側イデアル $(x_{ij} \,|\, i \ne j)$ 及び $(x_{ij} \,|\, i < j)$ は biideal である。

$k[T] = k[\mathrm{GL}_q(n)]/(x_{ij} \mid i \neq j)$ (q によらない torus の座標環になる。したがって，この状況でも weight の概念は $q = 1$ の場合と同じである)，$k[B_q(n)] = k[\mathrm{GL}_q(n)]/(x_{ij} \mid i < j)$ とおく。これらは極大トーラス T 及び Borel subgroup B の座標環の q-analogue になっている。Parshall と Wang [20] はこの状況で 4 節で述べた方法の q-analogue によって induced module, Weyl module を構成し，G/B の Serre duality の類似や，tensor product theorem, Weyl's character formula の類似等を証明した。Kempf's vanishing の類似も示されており，これから，Cline-Parshall-Scott-van der Kallen の消滅も成り立つことが分かり，4, 5 節で述べたように X^+ の任意の有限な saturated subset π に対して q-Schur algebra $S(\mathrm{GL}_q(n), \pi)$ が構成されて $(S(\mathrm{GL}_q(n), \pi), \pi)$ は quasi-hereditary になる。既に定義された q-Schur algebra $S_q(n, r)$ は $S(\mathrm{GL}_q(n), (-\infty, (r)])$ と一致しているので quasi-hereditary である。

多重線形的に量子一般線形群の多項式表現を大量に構成することができる。

定義 7.10 $TV = \bigoplus_{r \geq 0} V^{\otimes r}$ とおく。(V, β) の symmetric algebra SV, exterior algebra $\bigwedge V$ を $SV = TV/(\mathrm{Im}(1_{V \otimes V} - \beta))$, $\bigwedge V = TV/(\mathrm{Ker}(1_{V \otimes V} - \beta))$ によってそれぞれ定義する。$SV, \bigwedge V$ の degree r の component をそれぞれ $S_r V, \bigwedge^r V$ で表す。また，$DV := \bigoplus_{r \geq 0} D_r V$, $D_0 V := k$, $D_r V := \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}_q(r)}(k^+, V^{\otimes r})$ $(r \geq 1)$ とおく。ここに，k^+ は $\mathcal{H}_q(r)$ の trivial 表現 (つまり $b_i \mapsto 1$ $(i = 1, \ldots, r-1)$ で与えられる 1 次元表現) である。DV は (V, β) の *divided power algebra* と呼ばれる。

TV が $k[\mathrm{Mat}_q(n)]$-comodule algebra で，β が comodule map であることから，SV, $\bigwedge V$ も又そうである。また，DV は明らかな仕方で $k[\mathrm{Mat}_q(n)]$-comodule である。実は TV, SV, DV, $\bigwedge V$ には $k[\mathrm{Mat}_q(n)]$-equivariant graded YB bialgebra という豊富な multilinear structure が入る。これについては [11] を御覧下さい。

さて，$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathbb{N}^l$ とする。この時，

$$S_\lambda V := S_{\lambda_1} V \otimes \cdots \otimes S_{\lambda_l} V$$

と定義する。$\bigwedge_\lambda V$, $D_\lambda V$ も同様に定義される。$|\lambda| = r$ の時，これらは $S_q(n, r)$-module である。これらの表現の次元は k にも q にもよらない。

集合 $\{\lambda \in \mathbb{N}^n \mid |\lambda| = r\}$ を $I(n, r)$ で表すことにする。$I(n, r)$ の元で dominant (弱い意味で単調減少) なものの全体は $I^+(n, r)$ で表す。$I(n, r)$ は定義 4.12 の順序で順序集合である。即ち，$\lambda \geq \mu \iff \lambda - \mu \in \sum_{1 \leq i < n} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})\mathbb{N}$ である。この条件は，$i = 1, \ldots, n-1$ に対して $\sum_{j \leq i} \lambda_j \geq \sum_{j \leq i} \mu_j$ ともまた同値である。先に $(-\infty, (r)]$ と表した X^+ の部分集合と $I^+(n, r)$ は順序集合として同じである。したがって，$S_q(n, r)$ の単純加群は $I^+(n, r)$ で parameterize されている。

$S_\lambda V$ 及び $D_\lambda V$ の役割は次の補題で良く分かる。

補題 7.11 量子一般線形群の多項式表現の同型

$$k[\mathrm{GL}_q(n)] = SE^* \cong \bigoplus_r S_r E^* \cong \bigoplus_r \bigoplus_{\lambda \in I(n,r)} S_\lambda V,$$

$$S_q(n, r) \cong \bigoplus_{\lambda \in I(n,r)} D_\lambda V \qquad \mathrm{Hom}_k(S_q(n, r), k) \cong \bigoplus_{\lambda \in I(n,r)} S_\lambda V$$

が存在する。特に, $\lambda \in I(n,r)$ の時, $S_\lambda V$ $(D_\lambda V)$ は $S_q(n,r)$-module として injective (projective) である。

補題 7.12 ([12, Theorem 1.4]) 量子一般線形群の表現 L, M について自然な同型 $\beta_{L,M}$: $L \otimes M \cong M \otimes L$ が存在する。

この同型はいわゆる universal R-matrix を使って構成される。$k[\mathrm{Mat}_q(n)]$ は一般には可換環ではないので, obvious なテンサーの入れ換えでは comodule map になっていないので注意。この同型により, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in I(n,r)$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して, $S_\lambda V \cong S_{\sigma\lambda} V$, $D_\lambda V \cong D_{\sigma\lambda} V$ などが成り立つ。ここに $\sigma\lambda = (\lambda_{\sigma^{-1}1}, \ldots, \lambda_{\sigma^{-1}n})$ である。$I(n,r)$ の各 $\mathfrak{S}_r$-orbit はただ一つの $I^+(n,r)$ の元を含む。

$(S_q(n,r), I^+(n,r))$ の Weyl module は次のような表示を持つ。

補題 7.13 $\lambda \in I^+(n,r)$ に対して, 同型

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &\cong D_\lambda V \Big/ \left(\sum_{\mu \in I^+(n,r),\, \mu > \lambda} \ \sum_{\phi \in \mathrm{Hom}_{S_q(n,r)}(D_\mu V, D_\lambda V)} \mathrm{Im}\, \phi \right) \\
\nabla(\tilde{\lambda}) &\cong \textstyle\bigwedge_\lambda V \Big/ \left(\sum_{\mu \in I^+(n,r),\, \mu > \lambda} \ \sum_{\phi \in \mathrm{Hom}_{S_q(n,r)}(\bigwedge_\mu V, \bigwedge_\lambda V)} \mathrm{Im}\, \phi \right)
\end{aligned}$$

が存在する。

上の補題から $D_\lambda V \cong P(\lambda) \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} P(\mu)^{\oplus c_{\lambda\mu}}$ の形に分解されることとが分かる。第 2 の同型の第 1 の同型に対する一見奇妙な類似は次の節で説明される。

8 q-Schur algebra の tilting module

この節では q-Schur algebra の tilting module について述べる。この節の内容の多くは $q = 1$ の場合には Donkin [8] によって示されている。

さて, 一般に (A, π) が quasi-hereditary algebra で λ が π の極小元の時に, $\Delta(\lambda) \cong L(\lambda) \cong \nabla(\lambda) \cong T(\lambda)$ であることは見やすい。

以下では $n \geq r$ とする。q-Schur algebra $S_q(n,r)$ の単純加群を parameterize する $I^+(n,r)$ の最小元 $(1^r) = (1, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ について, 次が確かめられる。

補題 8.1 $\bigwedge^r V \cong \Delta((1^r))$ である。

Boffi-Varagnolo [2] は multiparameter を持つ量子一般線形群の skew Schur module が induced module filtration を持つことを示した。一般の skew module に関しては [9] 及びその中の参考文献を参照して下さい。特に次が示された。

定理 8.2 M, N が ∇-good な $k[\mathrm{Mat}_q(n)]$-comodules ならば, $M \otimes N$ もそうである。

上の定理から, (有限次元の) Δ-good な表現, tilting modules の直和であるような表現のクラスも, それぞれテンサー積で閉じている。このことと, weight を用いた簡単な議論から次が示される。

補題 8.3 $\lambda \in I^+(n,r)$ に対して, $S_q(n,r)$-modules の同型

$$\bigwedge\nolimits_\lambda V \cong T(\tilde{\lambda}) \oplus \bigoplus_{\mu > \lambda} T(\tilde{\mu})^{\oplus c'_{\lambda,\mu}}$$

が存在する。

$\lambda, \mu \in I^+(n,r)$ に対して, $\mu > \lambda \iff \tilde{\mu} < \tilde{\lambda}$ が成立することを注意する。

以下, $A = S_q(n,r)$ $(n \geq r)$, $T = \bigoplus_{\lambda \in I(n,r)} \bigwedge_\lambda V$ とおく。T は A の tilting cotilting module である。

さて, $V^{\otimes r} \cong D_{(1^r)}V$ は (7.11) によって ${}_AA$ の直和因子なので, $q = 1$ の時と同様に, A の巾等元 e を用いて, $V^{\otimes r} = Ae$ と表せる。(7.9) によって $\mathcal{H}_q(r) \cong eAe$ である。$f := \mathrm{Hom}(Ae, ?) : A\,\mathrm{mod} \to eAe\,\mathrm{mod}$, $g := Ae \otimes_{eAe} ? : eAe\,\mathrm{mod} \to A\,\mathrm{mod}$ とおく。

さらに, k-algebra map $\omega : \mathcal{H}_q(r) \to \mathcal{H}_q(r)$ を $\omega(b_i) = -q^2 b_i^{-1}$ で定義する (well-defined であることの確認は $\mathcal{H}_q(r)$ の定義から容易である)。$\omega^2 = \mathrm{id}$ であるから, ω は自己同型である。$\omega^\# : \mathcal{H}_q(r)\,\mathrm{mod} \to \mathcal{H}_q(r)\,\mathrm{mod}$ を $\mathcal{H}_q(r)_\omega \otimes_{\mathcal{H}_q(r)} ?$ として定義する。ここに $\mathcal{H}_q(r)_\omega$ は $\mathcal{H}_q(r)$ が ω を通して作用する右 $\mathcal{H}_q(r)$ 加群である。$\mathcal{H}_q(r)$ の 1 次元表現 $\omega^\#(k^+)$ を k^- で表すことにする。

$\Phi = g \circ \omega^\# \circ f : A\,\mathrm{mod} \to A\,\mathrm{mod}$ とおく。$q = 1$, $k = \mathbb{C}$ の時は, Φ は 'Young diagram を転置する involutive functor' である。

(8.4) $f \circ g \cong \mathrm{Id}$ が $eAe\,\mathrm{mod}$ 上で成立する。

(8.5) $g \circ f \cong \mathrm{Id}$ が $\mathrm{add}({}_AA)$ 上で成立する。

(8.6) $i + j = r$ の時, $M \in S_q(n,i)\,\mathrm{mod}$ と $N \in S_q(n,j)\,\mathrm{mod}$ に対して自然な同型

$$f(M \otimes N) \cong \mathcal{H}_q(r) \otimes_{\mathcal{H}_q(i) \otimes \mathcal{H}_q(j)} (f(M) \otimes f(N))$$

が存在する。ここに, $\mathcal{H}_q(i) \otimes \mathcal{H}_q(j)$ は k 上 $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_{r-1}$ で生成される $\mathcal{H}_q(r)$ の subalgebra と同一視されている。

(8.7) $i + j = r$ の時,

$$\mathcal{H}_q(i) \otimes \mathcal{H}_q(j) \hookrightarrow \mathcal{H}_q(r) \xrightarrow{\omega} \mathcal{H}_q(r)$$

は

$$\mathcal{H}_q(i) \otimes \mathcal{H}_q(j) \xrightarrow{\omega \otimes \omega} \mathcal{H}_q(i) \otimes \mathcal{H}_q(j) \hookrightarrow \mathcal{H}_q(r)$$

と一致する。

(8.8) $f(\bigwedge^r V) \cong k^-$, $f(S_r V) \cong f(D_r V) \cong k^+$

(8.9) $q^2 \neq -1$ ならば, $g(k^-) \cong \bigwedge^r V$

(8.10) $\lambda \in I(n,r)$ に対して, $\Phi(\bigwedge_\lambda V) \cong D_\lambda V$ である。特に, $\Phi(T) = \Phi(\bigoplus_\lambda \bigwedge_\lambda V) \cong \bigoplus_\lambda D_\lambda V \cong {}_A A$ である。

以上から, Quasi-hereditary algebra $A = S_q(n,r)$ は $n \geq r$ の時, 自分自身と共役であることが分かる。即ち, 次が成立する。

補題 8.11

$$\Phi : \mathrm{End}_A(T) \to \mathrm{End}_A(\Phi(T)) \cong \mathrm{End}_A({}_A A) \cong A$$

は k-algebra の同型である。

また, 次が成立している。

補題 8.12 自然変換

$$F = \mathrm{Hom}_A(T, ?) \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Hom}_A(\Phi(T), \Phi(?)) \cong \mathrm{Hom}_A(A, \Phi(?)) \cong \Phi$$

は add(T) 上で同型である。もし $q^2 \neq -1$ ならば, mod A 上で同型である。

$\{F(T(\lambda)) \,|\, \lambda \in I^+(n,r)\}$ が A の indecomposable projective modules の同型類の代表系であることと, $F(\bigwedge_\lambda V) \cong \Phi(\bigwedge_\lambda V) \cong D_\lambda V$ と, (8.3) 及び (7.13) によって, $F(T(\tilde{\lambda})) \cong P(\lambda)$ が $\lambda \in I^+(n,r)$ に対して成り立っていることが分かる。

前節の補題 7.13 の第 2 の式は, 第 1 の式に $G = T \otimes_A ?$ を施して得られることが分かる。以上により, $F(\nabla(\tilde{\lambda})) \cong \Delta(\lambda)$ であり, 補題 6.11 から直ちに Akin-Buchsbaum の定理の q-analogue が得られる。

命題 8.13 Quasi-hereditary algebra $A = S_q(n,r)$ $(n \geq r)$ について, $M, N \in \mathcal{F}(\nabla)$ とする時, $i \geq 0$ について同型

$$\mathrm{Ext}^i_A(M, N) \cong \mathrm{Ext}^i_A(FM, FN)$$

が存在する。特に, $\lambda, \mu \in I^+(n,r)$ に対して,

$$\mathrm{Ext}^i_A(\nabla(\tilde{\lambda}), \nabla(\tilde{\mu})) \cong \mathrm{Ext}^i_A(\Delta(\lambda), \Delta(\mu))$$

が存在する。

さて, 以上から, 古典的な $q = 1$, $k = \mathbb{C}$ の場合の involutive functor Φ は $F = \mathrm{Hom}_A(T, ?)$ で良く近似されており, 一般の場合にも F は良い性質を持っていることが分かる。古典的な場合の Φ の持つ良く知られた性質として, テンサー積と可換であるということがあげられる。この性質を F に期待することは無理なことではない。実際, 次が証明された。

命題 8.14 $i+j=r\leq n$ の時, $M\in S_q(n,i)$, $N\in S_q(n,j)$ に関して自然な同型

$$F(M\otimes N)\cong F(M)\otimes F(N)$$

が存在する。

[7] では, $q=1$ で $r>n$ の場合を扱っているので, 参照して下さい。

最後に, 本稿で述べた結果はほとんど k に (も q にも) よらなかったが, 逆にいうと, $[\Delta(\lambda):L(\mu)]$ など, k 又は q に依存して変化するものに関しては何もいっていない。

筆者にはとても解説する力などないが, 最近の大きな話題—Lusztig program の解説 [16] があることだけを述べさせて頂きます。

参考文献

[1] K. Akin and D. A. Buchsbaum, Characteristic-Free Representation Theory of the General Linear Group II. Homological Considerations, *Adv. in Math.* **72** (1988), 171–210.

[2] G. Boffi and M. Varagnolo, A Littlewood-Richardson filtration at roots of 1 for multiparameter deformations of skew Schur modules, preprint.

[3] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Algebraic stratification in representation categories, *J. Alg.* **117** (1988), 504–521.

[4] V. Dlab and C. M. Ringel, The module theoretical approach to Quasi-hereditary Algebras, in H. Tachikawa and S. Brenner (eds.), "Representations of algebras and related topics," London Math. Soc. Lect. Note Series **168** (1992), 200–224.

[5] V. Dlab and C. M. Ringel, Quasi-hereditary algebras, *Illinois J. Math.* **33** (1989), 280–291.

[6] S. Donkin, "Rational representations of algebraic groups," *Lect. Notes Math.* **1140**, Springer Verlag (1985).

[7] S. Donkin, On Schur algebras and related algebras, I, *J. Alg.* **104** (1986), 310–328.

[8] S. Donkin, On tilting modules for algebraic groups, *Math. Z.* **212** (1993), 39–60.

[9] S. Donkin, Skew modules for reductive groups, *J. Alg.* **113** (1988), 465–479.

[10] J. A. Green, "Polynomial Representations of GL_n," *Lect. Notes Math.* **830**, Springer Verlag (1980).

[11] M. Hashimoto and T. Hayashi, Quantum multilinear algebra, *Tôhoku Math. J.* **44** (1992), 471–521.

[12] T. Hayashi, Quantum deformation of classical groups, *Publ. RIMS* **28** (1992), 57–81.

[13] T. Hayashi, Quantum groups and quantum determinants, *J. Alg.* **152** (1992), 146–165.

[14] J. C. Jantzen, "Representations of algebraic groups," Academic Press (1987).

[15] M. Jimbo, A q-analogue of $U(\mathfrak{gl}(N+1))$, Hecke Algebra, and the Yang-Baxter Equation, *Lett. in Math. Phys.* **11** (1986), 247–252.

[16] 柏原正樹・谷崎俊之, Kazhdan-Lusztig 予想をめぐって, 数学 **47** 第 3 号 (1995), 269–285.

[17] S. Martin, "Schur algebras and representation theory," Cambridge University Press (1993).

[18] O. Mathieu, Filtrations of G-modules, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* (4) **23** (1990), 625–644.

[19] Y. Miyashita, Tilting modules of finite projective dimension, *Math. Z.* **193** (1986), 113–146.

[20] B. Parshall and J.-p. Wang, "Quantum linear groups," *Mem. Amer. Math. Soc.* **439** (1991).

[21] R. S. Pierce, "Associative Algebras," GTM**88**, Springer (1982).

[22] C. M. Ringel, The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences, *Math. Z.* **208** (1991), 209–223.

[23] L. L. Scott, Simulating algebraic geometry with algebra I: The algebraic theory of derived categories, *Proc. Symp. Pure Math.* **47** (1987), 271–281.

[24] M. E. Sweedler, "Hopf Algebras," Benjamin (1969).